Respuesta Libre (no amortiguada)

Ecuación de movimiento: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{0}$

Solución propuesta: $\mathbf{x}_{(t)} = \boldsymbol{\varphi} e^{i\lambda t}$ *(armónica)*

Problema de autovalores en la forma generalizada: $\left[\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M}\right] \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$

N autovalores reales positivos
Frecuencias propias
$\lambda_j = \omega_j \qquad j = 1 \cdots N$

N autovectores reales
Modos propios
$\boldsymbol{\Phi} = \left[\boldsymbol{\varphi}_1 \;\; \boldsymbol{\varphi}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{\varphi}_N\right]$ *Matriz modal*

Cambio de variable (coord. físicas a coord. modales) $\mathbf{x}_{(t)} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{p}_{(t)}$

Ecuación de movimiento en coord. modales: $\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{p}}_{(t)} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{p}_{(t)} = \mathbf{0}$

$$\overline{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_N \end{bmatrix}$$
masa modal

$$\overline{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_N \end{bmatrix}$$
rigidez modal

Respuesta Libre: amortiguación de proporcional (i)

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_N \end{bmatrix}$$
amortiguación modal

Ecuación de movimiento en coord. modales: $\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{p}}_{(t)} + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{p}}_{(t)} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{p}_{(t)} = \mathbf{0}$

N ecuaciones de la forma: $\mu_j \ddot{p}_j + \delta_j \dot{p}_j + \kappa_j p_j = 0 \qquad j = 1 \cdots N$

Definiendo: $\omega_j = \sqrt{\kappa_j / \mu_j} \qquad \zeta_j = \delta_j / 2\mu_j\omega_j \qquad \omega_{dj} = \omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}$

N ecuaciones de la forma: $\ddot{p}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{p}_j + \omega_j^2 p_j = 0 \qquad j = 1 \cdots N$

$$p_{j(t)} = e^{-\zeta_j\omega_j t}\left[A_{1j} Cos(\omega_{dj} t) + A_{2j} Sen(\omega_{dj} t)\right] \qquad j = 1 \cdots N$$

$$A_{1j} = p_{j(0)} \qquad A_{2j} = \frac{\dot{p}_{j(0)} + \zeta_j\omega_j p_{j(0)}}{\omega_{dj}}$$

$\left.\begin{matrix} p_{j(0)} \\ \dot{p}_{j(0)} \end{matrix}\right\}$ *Condiciones iniciales en las coordenadas modales*

I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

III. Sistemas de *N*-GDL
- Descripción
- Ec. de movimiento
- Cálculo de M y K
- **Resp. libre**
  - No amortiguada
  - **Amort. Rayleigh**
  - Amort. general
  - Ejemplo
- Resp. forzada
- Reducción modal

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Respuesta Libre: amortiguación proporcional (ii)

Condiciones iniciales en las coordenadas modales en función de las cond. iniciales en las coordenadas físicas

$$\mathbf{p}_{(0)} = \overline{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{x}_{(0)} \qquad p_{(0)j} = \tfrac{1}{\mu_j}\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{x}_{(0)}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{(0)} = \overline{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_{(0)} \qquad \dot{p}_{(0)j} = \tfrac{1}{\mu_j}\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_{(0)}$$

$$A_{1j} = p_{j(0)} = \tfrac{1}{\mu_j}\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{x}_{(0)}$$

$$A_{2j} = \frac{\dot{p}_{j(0)} + \zeta_j\omega_j p_{j(0)}}{\omega_{dj}} = \frac{1}{\mu_j}\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\left(\frac{1}{\omega_{dj}}\dot{\mathbf{x}}_{(0)} + \frac{\zeta_j}{\sqrt{1-\zeta_j^2}}\mathbf{x}_{(0)}\right)$$

Solución:

$$\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{\Phi}\mathbf{p}_{(t)} = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_j p_j = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_j e^{-\zeta_j\omega_j t}\left[A_{1j}Cos(\omega_{dj}t) + A_{2j}Sin(\omega_{dj}t)\right]$$

$$\mathbf{x}_{(t)} = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_j e^{-\zeta_j\omega_j t}\left[\frac{1}{\mu_j}\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{x}_{(0)}Cos(\omega_{dj}t) + \frac{1}{\mu_j}\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}\left(\frac{1}{\omega_{dj}}\dot{\mathbf{x}}_{(0)} + \frac{\zeta_j}{\sqrt{1-\zeta_j^2}}\mathbf{x}_{(0)}\right)Sin(\omega_{dj}t)\right]$$

La solución es una combinación lineal de los modos

La solución decae en el tiempo

La solución es armónica

I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

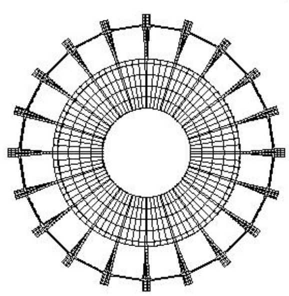
III. Sistemas de *N*-GDL
- Descripción
- Ec. de movimiento
- Cálculo de M y K
- **Resp. libre**
  - No amortiguada
  - **Amort. Rayleigh**
  - Amort. general
  - Ejemplo
- Resp. forzada
- Reducción modal

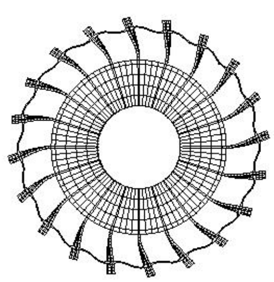
IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

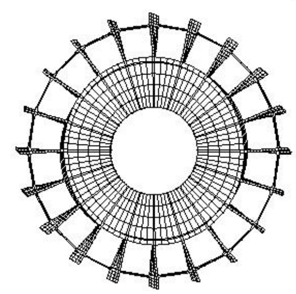
Respuesta Libre: amortiguación proporcional (iii)

Modos propios de vibración

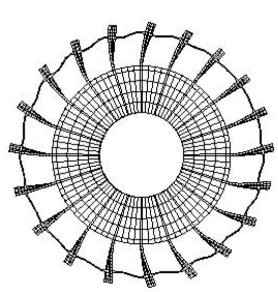




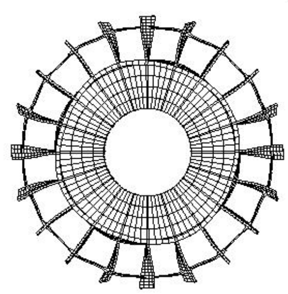
Modo 1 (409Hz)



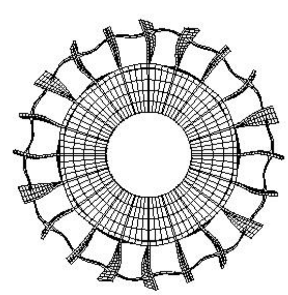
Modo 4 (572Hz)



Modo 9 (1217Hz)



Modo 11 (1241Hz)



Modo 15 (1706Hz)

Respuesta Libre: amortiguación general

Ecuación de movimiento: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{0}$

Solución propuesta: $\mathbf{x}_{(t)} = \boldsymbol{\varphi} e^{\lambda t}$

Problema de autovalores en la forma cuadrática: $\left[\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{K}\right]\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$

Problema de autovalores en la forma estándar:

$$\left[\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{I}\right]\begin{Bmatrix} \lambda\boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

2*N* autovalores complejos conjugados (parte real < 0): $\lambda_j = -a_j \pm b_j\, i$

$j = 1 \cdots N$

2*N* autovectores complejos conjugados: $\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\varphi}_{R_j} \pm \boldsymbol{\varphi}_{I_j}\, i$

Solución:

$$\mathbf{x}_{(t)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j e^{(-a_j \pm b_j i)t} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j e^{-a_j t}\left[\bar{A}_{1j} Cos(b_j t) + \bar{A}_{2j} Sin(b_j t)\right]$$

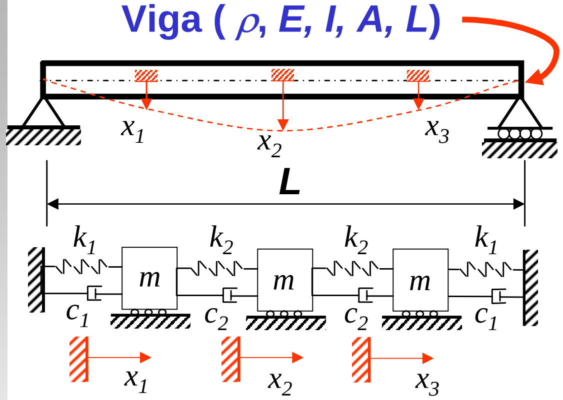
La solución decae en el tiempo !

2*N* constantes que dependen de las condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_{(t=0)} = \mathbf{x}_0 \qquad \dot{\mathbf{x}}_{(t=0)} = \mathbf{v}_0$$

Respuesta Libre: Viga simplemente apoyada (i)

Viga (ρ, E, I, A, L)



h, b

$A = b\,h \qquad I = \dfrac{b\,h^3}{12} \qquad M = \rho A L$

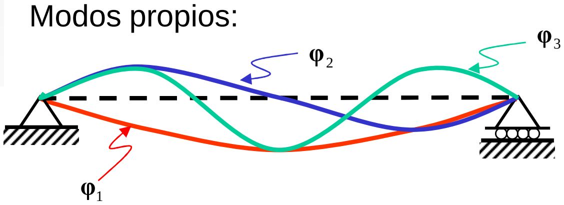
$$\mathbf{x}_{(t)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \frac{\rho A L}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{192 E I}{7 L^3}\begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix}$$

Frecuencias propias (sin amortiguación):

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.86659 \\ 39.1918 \\ 83.2128 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \qquad \begin{Bmatrix} \omega_{1ex} \\ \omega_{2ex} \\ \omega_{3ex} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pi^2 \\ 4\pi^2 \\ 9\pi^2 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} = \begin{Bmatrix} 9.8696 \\ 39.4784 \\ 83.8264 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$$

Modos propios:



$$\Phi = \left[\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \boldsymbol{\varphi}_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

I. Introducción
II. Sistema de 1-GDL
III. Sistemas de *N*-GDL
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
No amortiguada
Amort. Rayleigh
Amort. general
Ejemplo
Resp. forzada
Reducción modal
IV. Medición / diagnóstico
V. Bibliografía

Respuesta Libre: Viga simplemente apoyada (ii)

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \frac{\rho A L}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 97.35 & 0 & 0 \\ 0 & 768 & 0 \\ 0 & 0 & 6924.4 \end{bmatrix}$$

Datos: $\begin{cases} E = 200\,GPa \quad \rho = 7800\,{}^{kg}/_{m^3} \quad L = 10\,m \quad b = h = 0.1\,m \quad A = 0.01\,m^2 \\ I = 8.3\times 10^{-6} m^4 \quad M = 780\,kg \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 3\% \end{cases}$

$$\overline{\mathbf{M}} = 390\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}[kg] \quad \overline{\mathbf{K}} = 10^7\begin{bmatrix} 0.016 & 0 & 0 \\ 0 & 0.128 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15 \end{bmatrix}\left[{}^{N}/_{m}\right] \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0.73 \end{bmatrix}\left[{}^{Ns}/_{m}\right]$$

$$\omega_1 = 14.42\,{}^{r}/_{s} \quad \omega_2 = 57.29\,{}^{r}/_{s} \quad \omega_3 = 121.63\,{}^{r}/_{s} \quad \omega_{d1} = 14.41\,{}^{r}/_{s} \quad \omega_{d2} = 57.26\,{}^{r}/_{s} \quad \omega_{d3} = 121.58\,{}^{r}/_{s}$$

$$\omega_1 = 2.29Hz \quad \omega_2 = 9.09Hz \quad \omega_3 = 19.32Hz \quad \omega_{d1} = 2.29Hz \quad \omega_{d2} = 9.11Hz \quad \omega_{d3} = 19.35Hz$$

$$\mathbf{x}_{(t)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j e^{-\zeta_j \omega_j t}\left[A_{1j} Cos\left(\omega_{dj} t\right) + A_{2j} Sin\left(\omega_{dj} t\right)\right]$$

$$A_{1j} = p_{j(0)} = {}^{1}/_{\mu_j}\, \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(0)}$$

$$A_{2j} = \frac{\dot{p}_{j(0)} + \zeta_j \omega_j p_{j(0)}}{\omega_{dj}} = \frac{1}{\mu_j} \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M}\left(\frac{1}{\omega_{dj}} \dot{\mathbf{x}}_{(0)} + \frac{\zeta_j}{\sqrt{1-\zeta_j^2}} \mathbf{x}_{(0)}\right)$$

I. Introducción
II. Sistema de 1-GDL
III. Sistemas de *N*-GDL
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
No amortiguada
Amort. Rayleigh
Amort. general
Ejemplo
Resp. forzada
Reducción modal
IV. Medición / diagnóstico
V. Bibliografía

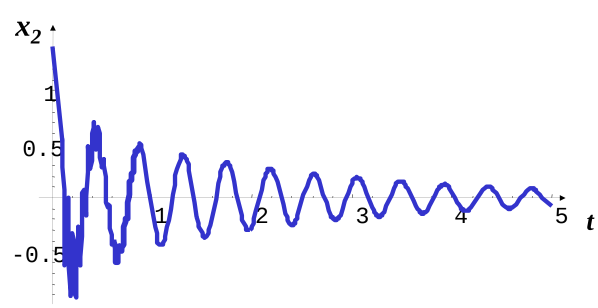
Respuesta Libre: Viga simplemente apoyada (iii)

Cond. iniciales

$$\mathbf{x}_{(0)} = \left\langle 0 \quad \sqrt{2} \quad 0 \right\rangle^T$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$A_{11} = \tfrac{1}{2} \quad A_{21} = 0.015$$
$$A_{12} = 0 \quad A_{22} = 0$$
$$A_{13} = \tfrac{1}{2} \quad A_{23} = 0.015$$



Cond. Iniciales (similar a modo 1)

$$\mathbf{x}_{(0)} = \left\langle \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad \tfrac{1}{2} \right\rangle^T$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{(0)} = \mathbf{0}$$

$$A_{11} = 0.6 \quad A_{21} = 0$$
$$A_{12} = 0.1 \quad A_{22} = 0.02$$
$$A_{13} = 0 \quad A_{23} = 0.003$$